Митюшов Е.А., Митюшова Л.Л.

ВЕКТОРНЫЕ АЛГОРИТМЫ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ: ЗЕРКАЛЬНОЕ ОТРАЖЕНИЕ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Ludamit@mail.ru
ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
г. Екатеринбург

В статье приведены оригинальные векторные алгоритмы аффинных преобразований: зеркального отражения, параллельного переноса. Показано преимущество векторных алгоритмов перед матричными, алгоритмы проиллюстрированы примерами.

Original vectorial algorithms of affine conversions: mirror – like reflection and parallel transfer are given in the article. The advantage of vectorial algorithms over matrix ones is shown, the algorithms are illustrated with examples.

Зеркальное отражение

Зеркальное отражение относительно плоскости, с единичным нормальным вектором $\vec{n}$, проходящей через точку M_1, – это преобразование, при котором все точки заданной плоскости остаются неподвижными, а точки находящиеся по одну сторону плоскости переходят в симметрично расположенные точки по другую ее сторону (рис. 1). Т.е. каждая точка M переходит в точку M' такую, что отрезок MM' перпендикулярен плоскости и делится ею пополам.

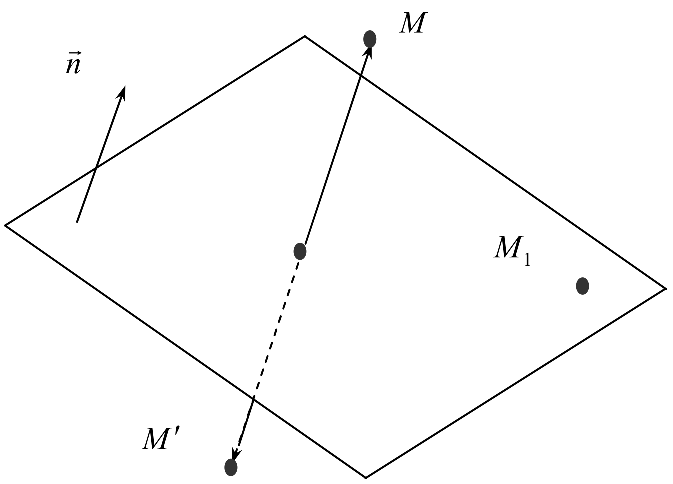

Рис. 1

Пусть M – положение произвольной точки пространства до зеркального отражения, а M' – ее положение после. Тогда, вводя в рассмотрение радиус-векторы $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$, $\vec{r}_1$ соответствующих точек M, M', M_1 и учитывая равенство $\overrightarrow{MM'} = -2\left(\left(\vec{r}-\vec{r}_1\right)\cdot\vec{n}\right)\vec{n}$, находим

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - 2\left(\left(\vec{r}-\vec{r}_1\right)\cdot\vec{n}\right)\vec{n} .$$

В координатной форме имеем

$$x' = x - 2\big((x - x_1)n_x + (y - y_1)n_y + (z - z_1)n_z\big)n_x,$$

$$y' = y - 2\big((x - x_1)n_x + (y - y_1)n_y + (z - z_1)n_z\big)n_y,$$

$$z' = z - 2\big((x - x_1)n_x + (y - y_1)n_y + (z - z_1)n_z\big)n_z.$$

Это позволяет записать матричное представление преобразования сжатия

$\hat{r}' = A_M\hat{r} + B_M\hat{r}_1$, ($M$ от англ. Mirror – зеркальный) (1)

где

$$\hat{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},\ \hat{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \hat{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

$$A_M = \begin{pmatrix} 1-2n_x^2 & -2n_yn_x & -2n_zn_x \\ -2n_xn_y & 1-2n_y^2 & -2n_zn_y \\ -2n_xn_z & -2n_yn_z & 1-2n_z^2 \end{pmatrix},\ B_M = \begin{pmatrix} 2n_x^2 & 2n_yn_x & 2n_zn_x \\ 2n_xn_y & 2n_y^2 & 2n_zn_y \\ 2n_xn_z & 2n_yn_z & 2n_z^2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что преобразование зеркального отражения получается из преобразования сжатия при $k = -1$.

Пример 1

Выполнить зеркальное отражение поверхности, полученной в примере 2 работы [1] при $\vec{r}_1 = (0{,}0{,}0)$, $\vec{n} = \{0{,}0{,}1\}$.

Переходя к матричным обозначениям и формируя матрицы A_M и B_M формулы (1), находим соответствующее преобразование зеркального отражения. Поверхности до и после зеркального отражения изображены на рис. 2.

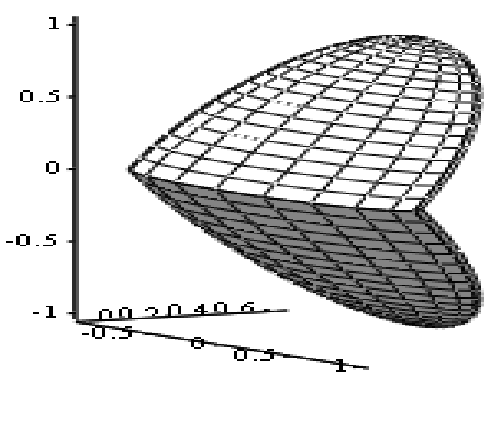

Рис.2

Параллельный перенос

Параллельный перенос – это преобразование, при котором все точки смещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Так как параллельный перенос задается постоянным вектором переноса $\vec{a}$, то положение произвольной точки M после параллельного переноса определяется равенствами

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$$

или

$$\hat{r}' = \hat{r} + \hat{a}, \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Пример 2

Выполнить параллельный перенос поверхности, полученной в примере 1, при $\vec{a} = \{0,1,0\}$.

Переходя к матричным обозначениям и используя результаты решения примера 1, находим соответствующее преобразование (2) параллельного переноса

$$\hat{r}' = A_M \hat{r} + B_M \hat{r}_1 + \hat{a}\,.$$

Поверхности до и после параллельного переноса изображены на рис. 3.

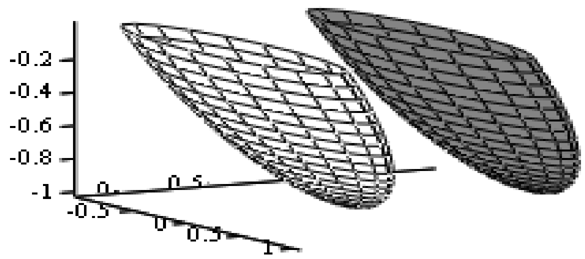

Рис.3

Митюшов Е.А., Митюшова Л.Л. 1. Векторные алгоритмы аффинных преобразований: сдвиг, растяжение – сжатие. Статья в настоящем сборнике.